Ecuaciones Diferenciales

1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

La ecuación diferencial de primer orden más simple tiene la forma: $\frac{dy}{dt} = g(t)$.

Y tiene por solución: $y(t) = \int g(t)dt + c$, donde c = *cte*.

Definición: la ecuación diferencial lineal general de primer orden es: $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$, donde las funciones $a(t)$ y $b(t)$ se suponen continuas en el tiempo. Cuando $b(t) = 0$ la ecuación se llama *ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden*, cuando $b(t)$ es diferente de cero la ecuación se llama *no homogénea*.

La ecuación homogénea: $\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$, tiene una sencilla solución ya que se puede escribir: $\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -a(t)$.

Observando que: $\frac{\frac{dy}{dt}}{y} \equiv \frac{d}{dt} ln\ |y(t)| \Rightarrow \frac{d}{dt} ln|y(t)| = -a(t)$.

Integrando de ambos lados se obtiene: $ln|y(t)| = -\int a(t)\, dt + c_1$.

Que se puede escribir finalmente como: $y(t) = c\ exp\left(-\int a(t)dt\right)$.

Y se conoce como solución general de la ecuación homogénea; para cada valor de la constante c se tendrá una solución, de modo que hay un número infinito de soluciones a la ecuación homogénea.

Para determinar una solución específica se puede determinar un valor particular para la solución; por ejemplo: $y_0 = y(t_0)$, que se conoce como *condición inicial*.

De modo que el problema se puede escribir como: $\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0;\ \ y(t_0) = y_0$.

La solución al problema de valor inicial se puede escribir como: $\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} ln|y(s)|ds = -\int_{t_0}^{t} a(s)ds$.

O bien, $y(t) = y_0\ exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$.

La ecuación no homogénea: $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$. Para resolver esta ecuación es necesario garantizar que la derivada del lado derecho de la ecuación de como resultado el lado izquierdo. Para logar esto se puede utilizar una función auxiliar $\mu(t)$ que cumpla con las siguientes características: $\mu(t)\ \frac{dy}{dt} + \mu(t)\ a(t)y = \mu(t)\ b(t)$.

Eligiendo $\mu(t)$ de modo que: $\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\ y = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)\ b(t)$.

Lo cual se cumple solo en el caso de que: $\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)a(t)$, que es una ecuación homogénea: $\frac{d\mu}{dt} - \mu(t)a(t) = 0$.

Y que tiene por solución: $\mu(t) = exp\left(\int a(t)dt\right)$. Para esta función auxiliar o *factor integrante* μ (t), la ecuación original puede escribirse como: $\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)b(t)$.

Para obtener la solución se integran ambos lados para obtener: $\mu(t)y = \int \mu(t)b(t)dt + c$.

O bien, $y = \frac{1}{\mu(t)}(\int \mu(t)b(t)dt + c) = exp\left(-\int a(t)dt\right)(\int \mu(t)b(t)dt + c)$.

Cuando se requiere una solución específica, se puede plantear el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)\ ;\ y(t_0) = y_0.$$

En este caso se toma la integral definida, de t_0 a t, en ambos lados de la ecuación: $\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)b(t)$.

De modo que $\mu(t)y - \mu(t_0)y_0 = \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds$. O bien: $y = \frac{1}{\mu(t)}\left(\mu(t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds\right)$.

Otra manera de resolver el problema de valor inicial es encontrar la solución general y después usar la condición inicial para calcular el valor constante c.

1.1 Variables Separables.

De manera análoga a la anterior puede resolverse la ecuación diferencial más general: $\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$; donde f y g son funciones continuas de y y t. Esta ecuación y cualquier otra que pueda escribirse de tal forma, se llama *ecuación separable*. Para resolverla se procede como sigue: $f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}F(y(t)) = g(t)$.

Así que: $F(y) = \int f(y)dy$; por lo tanto, $F(y(t)) = \int g(t)dt + c$. Para obtener la solución se despeja $y(t)$.

Ejemplo: sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2} \Rightarrow y^2dy = t^2dt$. O bien, $\int y^2dy = \int t^2dt + c$. Por lo tanto: $y^3(t) = t^3 + c$.

Así que: $y(t) = (t^3 + c)^{\frac{1}{3}}$. ■

Adicionalmente se tiene el problema de valor inicial: $\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)};\ y(t_0) = y_0$. Se puede resolver de dos formas, una es utilizar la condición inicial para encontrar el valor de la constante c, y la otra es haciendo las integrales definidas de t_0 a t para obtener: $F(y(t)) - F(y_0) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$.

Ecuaciones separables homogéneas: son de la forma $dy/dt = f(y/t)$; estas se pueden resolver haciendo la sustitución $y/t = v$, o bien, $y = tv$. Así que, $dy/dt = tdv/dt + v$ de modo que $tdv/dt + v = f(v)$.

La ecuación de Bernoulli: Sea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$; con $n \neq 0, 1$. Entonces, $\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$.

Como $\frac{d}{dx}(y^{-n+1}) = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, entonces, $\frac{1}{(-n+1)}\frac{d}{dx}(y^{-n+1}) + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$. Ahora, si $v = y^{-n+1}$

$\Rightarrow\ \frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$, por tanto $ve^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + c$.

1.2 Ecuaciones exactas y reducibles a exactas.

En general, es posible resolver todas las ecuaciones diferenciales de la forma: $\frac{d}{dt}\phi(t,y)=0$. De hecho integrando ambos miembros se obtiene $\phi(t,y)=constante$, y de aquí se despeja y como función de t, aunque no siempre se puede hacer de manera explícita.

Para encontrar todas las ecuaciones diferenciales que pueden expresarse en la forma: $\frac{d}{dt}\phi(t,y)=0$, obsérvese que a partir de la regla de la cadena para derivación parcial se tiene: $\frac{d}{dt}\phi(t,y(t))=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Por lo tanto una ecuación diferencial $M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$ puede escribirse en la forma $\frac{d}{dt}\phi(t,y)=0$ si y solo si existe una función $\phi(t,y)$ tal que $M(t,y)=\frac{\partial\phi}{\partial t}$ y $N(t,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$, y además se cumple con que $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$.

Obsérvese que $M(t,y)=\frac{\partial\phi}{\partial t}$ para una función $\phi(t,y)$ si y solamente si: $\phi(t,y)=\int M(t,y)dt+h(y)$; donde $h(y)$ es una función arbitraria únicamente de y.

Derivando parcialmente ambos lados con respecto a y se obtiene: $\frac{\partial\phi(t,y)}{\partial y}=\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+h'(y)$.

Por lo tanto, $\frac{\partial\phi(t,y)}{\partial y}=N(t,y)\Leftrightarrow N(t,y)=\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+h'(y)$. O bien, $h'(y)=N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt$

De modo que: $\frac{\partial h'(y)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\right]=\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial t}=0$.

Si esto se cumple, es posible resolver para determinada: $h(y)=\int\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\right]dy$.

Y podemos escribir: $\phi(t,y)=\int M(t,y)dt+h(y)=\int M(t,y)dt+\int\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\right]dy$.

Por lo tanto, se dice que la ecuación diferencial: $M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$ es exacta $\Leftrightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$.

El tratamiento anterior también puede realizarse considerando que: $N(t,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$.

De modo que $\phi(t,y)=\int N(t,y)dy+k(t)$.

Lo cual permite escribir: $\phi(t,y)=\int N(t,y)dy+\int\left[M(t,y)-\int\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dy\right]dt$.

Ejemplo: sea $3y+e^t+(3t+\cos y)\frac{dy}{dt}=0$. Haciendo $M(t,y)=3y+e^t$ y $N(t,y)=3t+\cos y$. Esta ecuación es exacta ya que: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}=3$.

Así que: $\phi(t,y)=\int M(t,y)dt+\int\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\right]dy$

y entonces: $\phi(t,y)=\int(3y+e^t)dt+\int\left[(3t+\cos y)-\int\frac{\partial(3y+e^t)}{\partial y}dt\right]dy=3ty+e^t+\text{sen }y$ ■

Para resolver el problema de valores iniciales basta evaluar la solución en la condición inicial, $\phi(t_0,y_0)=c$ y para encontrar el valor de la constante c.

Ahora supóngase que se tiene una ecuación de la forma $M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$ que no es exacta. Se puede utilizar una función $\mu(t,y)$ como factor integrante para que la ecuación se convierta en exacta.

Así se tendría: $\mu(t,y)M(t,y)+\mu(t,y)N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$; que debe cumplir: $\frac{\partial \mu M}{\partial y}=\frac{\partial \mu N}{\partial t}$.

La condición anterior se puede escribir explícitamente como: $M\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial \mu}{\partial t}+\mu\frac{\partial N}{\partial t}$

Lo cual solo puede ser cierto únicamente en caso de que la función $\mu=\mu(t)$ o $\mu=\mu(y)$.

Si $\mu=\mu(t)$ entonces la condición anterior se puede escribir como: $N\frac{\partial \mu}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)$.

O bien, $\frac{\partial \mu}{\mu}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)}{N}dt=R(t)$. Por tanto: $\mu(t)=\exp(\int R(t)\,dt)$, es el factor integrante.

El caso para $\mu=\mu(y)$ es completamente análogo.

1.3 Ecuaciones lineales y reducibles a lineales.

En ciertas situaciones, ecuaciones que no son lineales pueden convertirse a lineales mediante una sustitución adecuada, En general una sustitución de la forma $v=x^n y^m$ puede resolver este tipo de problemas. En particular dos sustituciones especiales son capaces de transformar ecuaciones no separables en ecuaciones separables.

Sustitución lineal: $v=ax+by+c$; $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Ejemplo: sea $\frac{dy}{dx}=x+y$; entonces, haciendo: $v=x+y, dv=dx+dy$, se tiene $\frac{dy}{dx}=v \implies \frac{dv-dx}{dx}=v$.

Así que: $\frac{dv}{dx}=v+1 \implies \ln(v+1)=x+c_1 \implies \ln(x+y+1)=x+c_1 \therefore y=ce^x-x-1$ ■

Sustitución racional: $v=\frac{y}{x}$.

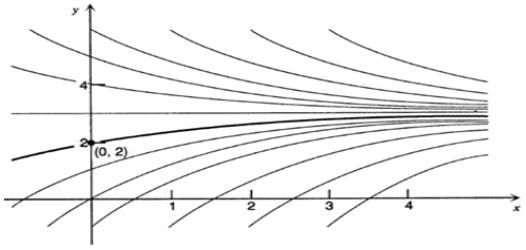
Ejemplo: sea $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$; entonces, haciendo: $v=\frac{x}{y}, dy=vdx+xdv$, se tiene $\frac{xdv+vdx}{dx}=1+v \implies \frac{xdv}{dx}=1$.

Así que: $v=\ln x+c \implies \frac{y}{x}=\ln x+c \therefore y=x\ln x+cx$ ■

1.4 Modelado aplicando las ecuaciones de primer orden.

Modelar las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden significa hacer las gráficas de la ecuación para diferentes valores de las constantes que aparecen en la solución.

Ejemplo:



$y=3-e^{-x/2}$

es la solución cuya gráfica contiene al punto dado (0, 2). Esto se ilustra con la curva de trazo grueso en la figura.

■

2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

2.1 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Definición: Una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma: $\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$ y sus condiciones iniciales se expresan como $y(t_0) = y_0$, $y_0'(t_0) = y_0'$.

De todas las ecuaciones de segundo orden existentes solo se pueden resolver las que tienen la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$$

Que se conocen como ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, cuando la función $g(t) = 0$, la ecuación se llama *homogénea*, en caso contrario se llama *no homogénea*.

Teorema: Para resolver una ecuación de segundo orden homogénea se puede asociar a esta un operador lineal $L[y]$ mediante la relación: $L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$.

Este operador cumple con las siguientes propiedades:
i) $L[cy] = cL[y]$ para toda constante c.
ii) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

De modo que si dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden y cumplen con el hecho de que el wronskiano $W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$ también lo serán todas las combinaciones lineales: $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, lo cual se conoce como *solución general*.

Así que pueden utilizarse las dos soluciones conocidas para generar una infinidad de soluciones.

Para encontrar los valores de las constantes c_1 y c_2 se pueden utilizar las condiciones iniciales, de modo que:

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \text{ y } c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0'$$

Definición: La ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes tiene la forma:

$$L[y](t) = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Para que esta ecuación tenga solución los términos deben ser del mismo tipo, es decir, que la función $y(t)$ debe ser tal que sus derivadas deben diferir tan solo en una constante para que puedan anularse. Esto ocurre en el caso de que $y(t) = e^{rt}$. De modo que $L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + c(e^{rt}) = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$.

Así que se tiene la ecuación característica: $(ar^2 + br + c) = 0$, de donde las soluciones son: $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Si la raíz es positiva las soluciones son reales y distintas, en este caso $y_{1,2}(t) = e^{r_{1,2}t}$ son dos soluciones distintas, ya que son linealmente independientes si $r_1 \neq r_2$.

Si en cambio la raíz es negativa, entonces la ecuación característica tiene raíces complejas. Supóngase entonces que $y(t) = u(t) + iv(t)$ es una solución con valores complejos de la ecuación, entonces se tiene que:

$$a[u''(t) + iv''(t)] + b[u'(t) + iv'(t)] + c[u'(t) + iv'(t)] = 0$$

Es una solución con valores complejos, la cual da dos soluciones con valores reales para:

$$e^{rt} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = e^{[-b + i\sqrt{4ac - b^2}]t/2a}$$

$$y_1(t) = u(t) = \exp(-bt/2a)\cos\beta t \quad \text{y} \quad y_2(t) = v(t) = \exp(-bt/2a)\,\text{sen}\,\beta t; \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Raíces iguales (*reducción de orden*): si ahora resulta que la raíz es cero, se obtiene una sola solución de la ecuación característica: $y_1(t) = \exp(-bt/2a)$. Por el método de reducción de orden se puede demostrar que la segunda solución tiene la forma: $y_2(t) = t\exp(-bt/2a)$.

2.2 Ecuación de Euler-Cauchy.

La ecuación: $a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$ se conoce como *ecuación de Euler Cauchy* y puede solucionarse usando la ecuación auxiliar: $a_0r(r-1) + a_1r + a_2 = 0$ que, si tiene raíces reales, $r = a$ y $r = b$ diferentes tendrá por solución completa: $y = c_1x^a + c_2x^b$. Si las raíces son iguales, entonces la solución será de la forma $y = c_1x^r + c_2x^r \ln x$. Y si la ecuación auxiliar tiene raíces complejas $r = a \pm ib$ la solución completa será entonces: $y = c_1x^a sen(b\ln x) + c_2x^a\cos(b\ln x)$.

2.3 Ecuaciones no homogéneas.

Considérese la ecuación: $L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$. Entonces, si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y $\psi(t)$ es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea se tiene que la solución general es: $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \psi(t)$.

2.4 Método de variación de parámetros.

Este método permite encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea una vez que se conocen las soluciones de la ecuación homogénea. Se puede demostrar que una solución particular de la ecuación no homogénea tiene la forma: $\psi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$.

Donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se obtienen al integrar: $u_1'(t) = -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1,y_2](t)}$ y $u_2'(t) = \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1,y_2](t)}$.

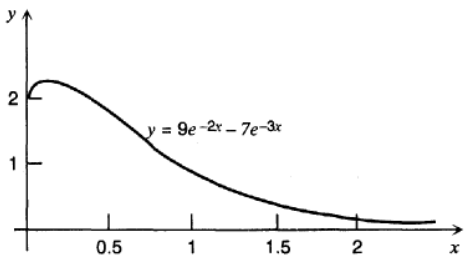
2.5 Método de coeficientes indeterminados.

A diferencia de los métodos de reducción de orden y variación de parámetros, que aunque son engorrosos son generales, este método solo se aplica a una clase restringida de ecuaciones por ese motivo no se revisará esta técnica en estas notas; aunque claro está que cuando este método es pertinente pudiera ser más fácil de emplear que los otros, pero su falta de generalidad también lo complica, al menos en lo que se refiere a su elección.

2.6 Modelado aplicando ecuaciones de segundo orden.

Modelar las soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden, como en el caso anterior, significa hacer las gráficas de la ecuación para diferentes valores de las constantes que aparecen en la solución.

Ejemplo:



Solución de $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

■

3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

La estructura teórica y los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo orden se extienden directamente a las ecuaciones de tercer orden y de orden superior. Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden tiene la forma: $P_o(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x)$. Con todas las funciones continuas y con valores reales en un intervalo dado. Si P_o es diferente de cero en todo punto del intervalo, se puede escribir:

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x).$$

Para obtener una solución es necesario especificar n condiciones iniciales: $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

La condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución, para valores arbitrarios de las condiciones iniciales es que el wronskiano sea diferente de cero al menos en el punto $x = x_0$.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0.$$

3.1 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Sea $L[y] = a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$. Se puede suponer que una solución es: $y(t) = e^{rt}$, de modo que: $L[e^{rt}] = e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n) = e^{rt}Z(r)$, el polinomio $Z(r) = 0$ es la ecuación característica asociada. Un polinomio de grado n tiene el mismo número de raíces, digamos $r_1, \ldots, r_n$, de modo que se puede escribir: $Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n)$. Si las raíces de la ecuación son reales y distintas entonces la solución general será: $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$.

Si existen raíces complejas, deben ocurrir por pares conjugados, $e^{(\lambda \pm i\mu)x}$, las cuales se pueden sustituir por soluciones de valores reales obtenidas de la parte real e imaginaria: $e^{\lambda x}\cos \mu x$ y $e^{\lambda x}\operatorname{sen} \mu x$.

Si existen raíces repetidas, se puede demostrar que podrán sustituirse por: $xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots$; según se requiera para garantizar la independencia lineal de las soluciones.

3.2 Ecuaciones no homogéneas.

Una ecuación de la forma: $L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x)$. Se puede tratar de resolver, primero encontrando una solución general de la ecuación homogénea y luego una solución particular de la ecuación completa, la no homogénea.

3.3 Método de variación de parámetros.

Este método se aplica para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea. Supóngase que la solución particular tiene la forma: $Y(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$, entonces, dado que tienen que determinarse n funciones, es necesario especificar n condiciones. Así que se eligen $n - 1$ condiciones igualadas a cero para facilitar los cálculos, ya que puede determinarse una simplificación de la función Y.

Entonces, para $Y' = (u_1 y_1' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n)$; con $(u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n) = 0$.

Se continúa este proceso para $n - 1$ derivadas; obteniendo: $Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + \cdots + u_n y_n^{(m)}$; $m = 1,2, \ldots, n - 1$.

La n-ésima derivada será: $Y^{(n)} = \left(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}\right) + \left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right)$.

A esta última ecuación se le impone la condición de que: $\left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right) = g$.

Así pues se ha obtenido el sistema:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n &= 0 \\ u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} &= g \end{aligned}$$

Como en este caso $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ ya que todas las soluciones se suponen linealmente independientes, de modo que es posible determinar el conjunto $u_1', \ldots, u_n'$ usando la regla de Cramer.

La solución del sistema de ecuaciones es: $u_m'(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}$, $m = 1,2, \ldots, n$;

y W_m es el determinante que se obtiene al sustituir la n-ésima columna por la columna $(0.0, \ldots, 0,1)$.

Por lo tanto, una solución particular se expresa por: $Y(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)} dt$.

Es claro que los cálculos se vuelven cada vez más complicados a medida que n crece.

3.4 Método de coeficientes indeterminados.

Este método solo puede ser aplicado a ecuaciones con coeficientes constantes y a una clase limitada de funciones $g(x)$ de modo que por su falta de generalidad no se revisará en estas notas.

4. SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

4.1 Método de las series de potencias.

Considérese la ecuación lineal homogénea general de 2° orden: $L[y] = P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = 0$.

Con $P(t) \neq 0$ en un intervalo, de modo al dividir por esta función se tiene: $L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$. Así que la solución será de la forma: $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. En el caso de que los tres términos de la ecuación sean polinomios, la solución general también será un polinomio, de modo que para hallar esta solución bastará con igualar a cero la suma de los coeficientes de las potencias iguales; es decir, si la solución es de la forma: $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \implies y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ y $y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$.

Por simplicidad, para ilustrar el método de resolución, supongamos que $p(x) = -2t$ y $q(x) = -2$.

De modo que si $y(t)$ es solución, se cumple que:

$$L[y](t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

El siguiente paso sería escribir los términos de la primera sumatoria de modo que el exponente sea $m = n - 2$.

$$L[y](t) = \sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} t^m - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Pero $(m+2)(m+1) = 0$ para $m = -1$ y $m = -2$; entonces se tiene que.

$$L[y](t) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} t^m - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Y como el índice es mudo, se puede volver a la notación con índice n:

$$L[y](t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\,t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}na_n\,t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,t^n = 0$$

Igualando a cero la suma de los coeficientes de potencias iguales se tiene que:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}.$$

La última, es una fórmula recursiva para los coeficientes, que permite determinarlos todos una vez que se fijan los valores para a_0 y a_1 a partir de las condiciones iniciales. Para encontrar las dos soluciones se eligen dos valores diferentes para a_0 y a_1; digamos (i) $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, y (ii) $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$.

Nota: es claro que dependiendo de la forma de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ se puede requerir trabajo algebraico adicional para poder encontrar las relaciones de recurrencia.

4.2 Teoría del método de las series de potencias.

Una serie de potencias puede estar centrada en cero o bien alrededor de un punto, este es el caso si $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(t-t_0)^n$, cuyo radio de convergencia queda definido por $\delta > |t-t_0|$ y es el mismo para la integral o la derivada, el cual queda determinado por el criterio de Cauchy. El producto de dos series de potencias $[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(t-t_0)^n][\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,(t-t_0)^n] = \sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(t-t_0)^n$ donde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$. El cociente de dos series de potencias también es una serie de potencias, siempre que no se anule el denominador.

5. OPERADORES DIFERENCIALES

5.1 Funciones y campos vectoriales y escalares.

Definición: Sea f una función cuyo dominio es un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y con un recorrido contenido en $\mathbb{R}^m$. Es decir, que a cada $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, la función le asigna un valor $f(\boldsymbol{x})$. Entonces se denomina *función con valores vectoriales,* si $m > 1$, y *función con valores escalares* si $m = 1$.

Definición: Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\boldsymbol{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\boldsymbol{x}$ de su dominio A un vector $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. Si $n = 3$, se llama *campo vectorial en el espacio*.

Un campo escalar es una aplicación $\boldsymbol{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $\boldsymbol{x}$ de su dominio A un escalar $F(x)$. Si $n = 3$, se llama *campo escalar en el espacio*.

5.2 Gradiente de un campo escalar. Derivada direccional. Interpretación física.

Definición: Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el *gradiente* de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

De forma geométrica el gradiente es un vector que se encuentra normal (perpendicular) a la curva de nivel en el punto que se está estudiando, llámese(x, y), (x, y, z), (tiempo, temperatura), etcétera. Algunos ejemplos son:

Considere una habitación en la cual la temperatura se define a través de un campo escalar, de tal manera que en cualquier punto (x, y, z), la temperatura es $T(x, y, z)$. Asumiremos que la temperatura no varía con respecto al tiempo. Siendo esto así, para cada punto de la habitación, el gradiente en ese punto nos dará la dirección en la cual se calienta más rápido. La magnitud del gradiente nos dirá cuán rápido se calienta en esa dirección.

Considere una montaña en la cual su altura en el punto (x, y) se define como $H(x, y)$. El gradiente de H en ese punto estará en la dirección para la que hay un mayor grado de inclinación. La magnitud del gradiente nos mostrará cuán empinada se encuentra la pendiente.

Así pues, el gradiente de una función apunta en la dirección en la que la función crece más rápidamente y es normal al plano tangente de la superficie de nivel de la función.

Definición: Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces todas las derivadas direccionales existen. La *derivada direccional* en $\boldsymbol{x}$ en la dirección $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es igual a:

$$\boldsymbol{D}\mathrm{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot v_3.$$

La derivada direccional de una función multivariable sobre un vector dado, representa la tasa de cambio (pendiente) de la función en la dirección de dicho vector. Este concepto generaliza a las derivadas parciales, ya que estas son derivadas direccionales en los vectores paralelos a los ejes.

5.3 Divergencia de un campo vectorial. Interpretación física.

Definición: Si $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ su divergencia es: $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" $Div\, \boldsymbol{F} > 0$ y si tiene "sumideros" $Div\, \boldsymbol{F} < 0$.

5.4 Rotacional de un campo vectorial. Interpretación física.

Definición: Si $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ entonces su rotacional es el campo vectorial: $\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

Este operador vectorial muestra la tendencia de un campo vectorial (usualmente representativo de un fluido) a inducir rotación alrededor de un punto. Si su valor es igual a cero en un punto significa que está libre de rotaciones en ese punto.

EJEMPLOS Y PROBLEMAS RESULTOS

Ecuaciones diferenciales de primer orden:

1. Obtener la solución general de la ecuación: $\frac{dy}{dt} + 2ty = 0$.

Solución: $\frac{dy}{y} = -2tdt$, entonces $\int \frac{dy}{y} = -2\int tdt + c_1, \Rightarrow \ln|y(t)| = -t^2 + c_1, \Rightarrow y(t) = ce^{-t^2}$.

2. Determinar el comportamiento para $t \to \infty$ de todas las soluciones de la ecuación: $\frac{dy}{dt} + ay = 0; a = cte$.

Solución: $y(t) = ce^{-at}$, de modo que si $t \to \infty$ para $a > 0$ entonces $y(t) \to 0$; si $a < 0$ entonces $y(t) \to \infty$.

3. Obtener la solución del problema de valor inicial: $\frac{dy}{dt} + (\sin t)y = 0; y(0) = \frac{3}{2}$.

Solución: $y(t) = \frac{3}{2}\exp\left\{-\int_0^t \sin t\, dt\right\} = \frac{3}{2}\exp\{\cos t|_0^t\} = \frac{3}{2}\exp\{\cos t|_0^t\} = \frac{3}{2}e^{(\cos t)-1}$.

4. Hallar la solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} + e^{t^2}y = 0; y(1) = 2$.

Solución: aquí $a(t) = e^{t^2}$, así que: $y(t) = 2\exp\left\{-\int_1^t e^{s^2}ds\right\}$.

5. Obtener la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dt} = -2ty = t$.

Solución: Aquí $a(t) = -2t$, así que $\mu(t) = \exp\{\int a(t)dt\} = \exp\{-\int 2tdt\} = e^{-t^2}$.

De aquí se sigue que: $e^{-t^2}y = \int te^{-t^2}dt + c = -\frac{e^{-t^2}}{2} + c$; por lo que $y(t) = -\frac{1}{2}ce^{t^2}$.

6. Encontrar la solución del problema con valor inicial $\frac{dy}{dt} + 2ty = t, y(1) = 2$.

Solución: Aquí $a(t) = 2t$, así que $\mu(t) = \exp\{\int a(t)dt\} = \exp\{\int 2tdt\} = e^{t^2}$.

De modo que, $\frac{d}{dt}\left(e^{t^2}y\right) = te^{t^2}$, entonces $\left(e^{t^2}y\right)_1^t = \int_1^t te^{t^2}dt = \left.\frac{e^{t^2}}{2}\right]_1^t$, $e^{t^2}y - 2e = \frac{e^{t^2}}{2} - \frac{e}{2}$

Por lo tanto, $y = \frac{1}{2} + \frac{3e^{1-t^2}}{2}$.

7. Encontrar la solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{1+t^2}, y(2) = 3$.

Solución: aquí $a(t) = 1$, así que $\mu(t) = \exp\{\int a(t)dt\} = \exp\{\int 1dt\} = e^t$

Entonces, $\frac{d}{dt}(e^t y) = \frac{e^t}{1+t^2}$, así que $e^t y - 3e^2 = \int_2^t \frac{e^t}{1+t^2}dt$, por lo tanto $y = e^{-t}\left[3e^2 + \int_2^t \frac{e^t}{1+t^2}dt\right]$.

Ecuaciones separables:

1. Obtener la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dt} = t^2/y^2$.

Solución: entonces, $y^2 dy = t^2 dt$, así que $\frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c$, de modo que $y = (t^3 + c)^{1/3}$.

2. Encontrar la solución general de la ecuación $e^y \frac{dy}{dt} - t - t^3 = 0$.

Solución: entonces, $e^y dy = (t + t^3)dt$, de modo que $e^y = \int (t + t^3)dt + c = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c$.

Así que, $y = \ln|\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c|$.

3. Encontrar la solución al problema de valor inicial $e^y \frac{dy}{dt} - t - t^3 = 0$; $y(1) = 1$

Solución: como $y = \ln|\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c|$, entonces $y(1) = \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c\right| = \ln|\frac{3}{4} + c| = 1$; entonces $c = e - \frac{3}{4}$.

$\therefore\ y = \ln|\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + e - \frac{3}{4}|$.

4. Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

Solución: entonces, $\frac{1}{1+y^2} dy = dt$, así que $\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dt + c$, o bien $\arctan y = t + c$,

de donde $y = \tan(t + c)$. Como $y(0) = 0$ entonces $\tan c = 0$ implica que $c = 0$. $\therefore y = \tan t$.

5. Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

Solución: entonces, $\int_1^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^t dt$, de modo que $\arctan y - \arctan 1 = t$, por lo que $y = \tan(t + \pi/4)$

Esta solución solo existe en el intervalo abierto $-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$.

6. Encontrar la solución al problema de valor inicial $y\frac{dy}{dt} + (1 + y^2)\sin t = 0$, $y(0) = 1$.

Solución: entonces, $\frac{1}{2}\int_1^y \frac{2y}{1+y^2} dy = \int_0^t -\sin t\, dt$, de modo que, $\frac{1}{2}\ln|(1 + y^2)| - \frac{1}{2}\ln|(1 + 1)| = \cos t - 1$

Así que, $\sqrt{\frac{1+y^2}{2}} = e^{\cos t - 1} = e^{-2\sin^2 t/2}$, o bien, $y = \pm\left(2e^{-4\sin^2 t/2} - 1\right)^{1/2}$.

Esta solución solo está definida si $2e^{-4\sin^2 t/2} \geq 1$, o $e^{4\sin^2 t/2} \leq 2$, lo cual implica que $4\sin^2 t/2 \leq \ln 2$,

y entonces, $\left|\frac{t}{2}\right| \leq \arcsin\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}$, por tanto $y(t)$ solo existe en el intervalo abierto $(-a, a)$, con $a = 2\arcsin\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}$.

7. Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = (1 + y)t$, $y(0) = -1$.

Solución: en este caso no se puede dividir entre $(1 + y)$, pero $y(t) = -1$ es una solución.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE EXAMEN

1. Suponer que se tiene un tanque semiesférico de radio R, que inicialmente está lleno de agua y que en el fondo tiene una salida cuya sección transversal tiene un área de 5 cm^2. La salida se abre en cierto instante. Encontrar el tiempo para que el tanque se vacíe para cualquier radio.

   HINT: La ley de Torricelli establece que la velocidad con que sale el agua por un orificio en un tanque está dada por: $v = 0.6\sqrt{2gh}$.

   $\Longrightarrow v = 0.6\sqrt{2gh} = \frac{dh}{dt}$, así que: $\frac{dh}{\sqrt{h}} = 0.6\sqrt{2g}\,dt \Longrightarrow \int_0^R \frac{dh}{\sqrt{h}} = 0.6\sqrt{2g}\int_0^t dt$

   $\Longrightarrow \int_0^R \frac{dh}{\sqrt{h}} = 0.6\sqrt{2g}\int_0^t dt \Longrightarrow 2\sqrt{h}\,|_0^R = 0.6\sqrt{2g}\,t \;\therefore\; t = \frac{2\sqrt{R}}{0.6\sqrt{2g}} = \frac{1}{0.6}\sqrt{\frac{2R}{g}}$ ■

2. Reduzca la siguiente ecuación de Bernoulli a la forma lineal y resuelva: $\frac{dy}{dx} + y = y^2$

   $\Longrightarrow$ Sea $y = z^{-1} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$. De modo que se puede escribir: $-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}$.

   Multiplicando ambos lados por z^2, se tiene: $-\frac{dz}{dx} + z = 1 \Longrightarrow -\frac{dz}{(1-z)} = dx$.

   $\Longrightarrow \int \frac{-dz}{(1-z)} = \int dx + c \Longrightarrow \ln(1-z) = x + c \Longrightarrow -z = e^{x+c} - 1 \;\therefore\; y = \frac{1}{1-ce^x}$ ■

3. Determine la frecuencia de oscilación de un péndulo de longitud L. Suponga que θ es tan pequeño que $\sin\theta \approx \theta$.

   $\Longrightarrow$ Sea $l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$ una ecuación para el péndulo.

   Como $\sin\theta \approx \theta$ entonces se puede escribir: $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$. Si $\theta = \sin\omega t$.

   $\Longrightarrow -l\,\omega^2\sin\omega t + g\sin\omega t = 0 \;\;\therefore\;\; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ■

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial con coeficientes variables: $x^2y'' + 10xy + 8y = x^2$

   HINT: Considere la ecuación de Euler-Cauchy.

   $\Longrightarrow$ La ecuación homogénea es: $x^2y'' + 10xy + 8y = 0$.

   Suponemos que la solución es de la forma $y = x^r \Longrightarrow y' = rx^{r-1} \Longrightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}$.

   Sustituyendo tenemos: $x^2r(r-1)x^{r-2} + 10xrx^{r-1} + 8x^r = 0$.

   $\Longrightarrow x^r\,[r(r-1) + 10r + 8] = 0 \Longrightarrow r^2 + 9r + 8 = 0$ es la ecuación característica, y $r_{1,2} = -1, -8$.

   Así que la solución general de la ecuación homogénea es: $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-8}$.

   La solución general de la ecuación no homogénea tiene la forma: $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-8} + \psi(x)$.

   Donde la función $\psi(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea y puede tener la forma: $\psi(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$. Que debe satisfacer: $W(x) = [y_1y_2' - y_1'y_2] \neq 0$.

   Si esto ocurre, $\Longrightarrow u_{1,2} = -\int \frac{g(x)y_{1,2}(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx$ ■

5. Encuentre la solución general de la ecuación: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$.

   $\Longrightarrow$ La ecuación homogénea es: : $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Si $y = e^{kx}$.

   Se puede escribir: $e^{kx}[k^3 - 3k^2 + 3k - 1] = 0$, como ecuación auxiliar de tercer grado. $k = 1$.

   Así pues, como las tres raíces son reales e iguales, la solución a la ecuación diferencial homogénea tiene la forma: $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$.

   La solución general de la ecuación no homogénea tiene la forma: $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + Y(x)$.

   Donde la función $Y(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea y puede tener la forma:$Y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + u_3(x)y_3(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x)\int_{x_0}^{x} \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}\,dt$. ■

Problemas Resueltos

1. Para la EDOL siguiente, definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$y^{(2)} + xy^{(1)} + y = 0$$

a) Verifique que $\varphi_1 = \exp(-x^2/2)$ y $\varphi_2 = \exp(-x^2/2)\int_0^x \exp(s^2/2)\,ds$ son soluciones.

b) Calcule el wronskiano $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$.

c) Demuestre, usando lo anterior que $[\varphi_1, \varphi_2]$ son soluciones fundamentales.

Respuestas:

a) $\varphi_1 = \exp(-x^2/2)$;

$\varphi_1^{(1)} = -x\exp(-x^2/2)$; y

$\varphi_1^{(2)} = -\exp(-x^2/2) + x^2\exp(-x^2/2)$.

De modo que:

$$\varphi_1^{(2)} + x\varphi_1^{(1)} + \varphi_1 = -\exp(-x^2/2) + x^2\exp(-x^2/2) + x[-x\exp(-x^2/2)] + \exp(-x^2/2) = 0$$

$\therefore$ φ_1 si es una solución.

Ahora: $\varphi_2 = \exp(-x^2/2)\int_0^x \exp(-s^2/2)\,ds$, si $I|_0^x \equiv \int_0^x \exp(s^2/2)\,ds$

$\Rightarrow \varphi_2 = \exp(-x^2/2)I|_0^x$;

$\varphi_2^{(1)} = -x\exp(-x^2/2)I|_0^x + \exp(-x^2/2)\frac{d}{dx}I|_0^x$;

$\varphi_2^{(1)} = -x\exp(-x^2/2)I|_0^x + \exp(-x^2/2)[\exp(x^2/2) - 1]$;

ya que: $\frac{d}{dx}I|_0^x = \frac{d}{dx}\int_0^x \exp(s^2/2)\,ds = [\exp(x^2/2) - 1]$

$\varphi_2^{(1)} = -x\exp(-x^2/2)I|_0^x + 1 - \exp(-x^2/2)$.

y,

$$\varphi_2^{(2)} = [-\exp(-x^2/2) + x^2\exp(-x^2/2)]I|_0^x - x\exp(-x^2/2)[\exp(x^2/2) - 1] + x\exp(-x^2/2)$$

$\varphi_2^{(2)} = [-\exp(-x^2/2) + x^2\exp(-x^2/2)]I|_0^x - x + x\exp(-x^2/2) + x\exp(-x^2/2)$;

$\varphi_2^{(2)} = [-\exp(-x^2/2) + x^2\exp(-x^2/2)]I|_0^x - x + 2x\exp(-x^2/2)$;

De modo que:

$$\varphi_2^{(2)} + x\varphi_2^{(1)} + \varphi_2$$
$$= [-\exp(-x^2/2) + x^2\exp(-x^2/2)]I|_0^x - x + 2x\exp(-x^2/2)$$
$$+ x[-x\exp(-x^2/2)I|_0^x + 1 - \exp(-x^2/2)] + \exp(-x^2/2)I|_0^x$$

$= -\exp(-x^2/2)I|_0^x + x^2\exp(-x^2/2)I|_0^x - x + 2x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)I|_0^x + x -$
$x\exp(-x^2/2) + \exp(-x^2/2)I|_0^x,$

$= x\exp(-x^2/2) \neq 0,$

$\therefore$ φ_2 no es una solución.

b) Se calcule el wronskiano $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$:

De modo que si dos soluciones $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden y cumplen con el hecho de que el wronskiano $W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t) \neq 0$ también lo serán todas las combinaciones lineales: $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$, lo cual se conoce como *solución general*.

Así que,

$W[\varphi_1, \varphi_2](t) =$

$\exp(-x^2/2)\,[-x\exp(-x^2/2)I|_0^x + 1 - \exp(-x^2/2)] - [-x\exp(-x^2/2)I|_0^x + 1 - \exp(-x^2/2)]\exp(-x^2/2)I|_0^x,$

$= [-x\exp(-x^2)I|_0^x + \exp(-x^2/2) - \exp(-x^2)] + [x\exp(-x^2)I|_0^x \cdot I|_0^x - \exp(-x^2/2)I|_0^x + \exp(-x^2)\,I|_0^x] \neq 0.$

$\therefore$ aunque $W[\varphi_1, \varphi_2](t) \neq 0$, como $\varphi_2(t)$ no es solución, tampoco lo será su combinación lineal.

Cabe aclarar que si $W[\varphi_1, \varphi_2](t) = 0$, entonces φ_1 y φ_2 son la misma solución; es decir que son linealmente dependientes pues difieren tan solo por una constante.

c) Demuestre, usando lo anterior que $[\varphi_1, \varphi_2]$ son soluciones fundamentales:

Esto no es posible, aunque $[\varphi_1, \varphi_2]$ son linealmente independientes, como $\varphi_2(t)$ no es solución, no existen constantes c_1 y c_2 que hagan que $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$, sea una solución ■

2. Se resuelven las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y^{(1)} = \sin(x - y)$$

$$y^{(2)} - 6y^{(1)} + 9y = 25e^{x} \sin x$$

$$\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) dx = \frac{x^2 + y^2}{y^2 x} dy$$

a) $y^{(1)} = \sin(x - y)$

Entonces, sea $z = x - y, \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$; así que $1 - \frac{dz}{dx} = \sin z, \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \sin z$

$z = \int (1 - \sin z) dz = z + \cos z$; Así que, $\cos z = 0 \Rightarrow z = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = x - y, \Rightarrow y = x - \frac{\pi}{2}$. !

b) $y^{(2)} - 6y^{(1)} + 9y = 25e^{x} \sin x$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$.

Su solución es de la forma $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \psi(t)$, donde y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea y $\psi(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Entonces, para hallar y_1 y y_2, proponemos que $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2 e^{rx}$, de modo que:

$r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 9e^{rx} = 0$, entonces: $e^{rx}(r^2 - 6r + 9) = 0$; donde $(r^2 - 6r + 9) = 0$ es la ecuación característica, y tiene por soluciones: $r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

De modo que ambas raíces son iguales, por lo que $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = xe^{3x}$, son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

Es decir: $y_H(t) = c_1 e^{3x} + c_2 xe^{3x}$.

Obviamente $W[y_1, y_2](t) = e^{3x}[e^{3x} + 3xe^{3x}] - 3e^{3x} \cdot xe^{3x} = e^{6x} \neq 0$

Ahora buscamos la solución particular de la ecuación no homogénea, que tiene la forma:

$$\psi(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t),$$

Donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se obtienen al integrar: $u_1'(t) = -\frac{g(t) y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}$ y $u_2'(t) = -\frac{g(t) y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}$

Así que: $u_1'(t) = -\frac{25e^{x} \sin x \cdot xe^{3x}}{e^{6x}} = -\frac{25x \sin x}{e^{2x}}$; $u_2'(t) = -\frac{25e^{x} \sin x \cdot e^{3x}}{e^{6x}} = -\frac{25 \sin x}{e^{2x}}$

$\therefore\ u_1(t) = -25 \int \frac{x \sin x}{e^{2x}} dx$ y $u_2(t) = -25 \int \frac{\sin x}{e^{2x}} dx$.

$\therefore\ \psi(t) = -25\int \frac{x\sin x}{e^{2x}}dx \cdot e^{3x} - 25\int \frac{\sin x}{e^{2x}}dx \cdot xe^{3x}.$

$\therefore\ \ y(t) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} - 25e^{3x}\int \frac{x\sin x}{e^{2x}}dx - 25xe^{3x}\int \frac{\sin x}{e^{2x}}dx$ ■

c) $\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx = \frac{x^2+y^2}{y^2x}dy.$

Entonces, $\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right) - \frac{x^2+y^2}{y^2x}\frac{dy}{dx} = 0$

Por lo tanto una ecuación diferencial $M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$ puede escribirse en la forma $\frac{d}{dt}\phi(t,y) = 0$ si y solo si existe una función $\phi(t,y)$ tal que $M(t,y) = \frac{\partial\phi}{\partial t}$ y $N(t,y) = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, y además se cumple con que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

Haciendo $M(t,y) = \left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)$ y $N(t,y) = \frac{-x^2-y^2}{y^2x}$,

Entonces: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2yx^2y - (x^2+y^2)x^2}{x^4y^2} = \frac{2y^2-(x^2+y^2)}{x^2y^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$

y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-2xy^2x+(x^2+y^2)y^2}{y^4x^2} = \frac{-2x^2+(x^2+y^2)}{y^2x^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$.

$\therefore\ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ y la ecuación es exacta.

Así que la solución es de la forma: $\phi(t,y) = \int M(t,y)dt + \int\left[N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\right]dy$

$\phi(t,y) = \int\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dt + \int\left[\frac{-x^2-y^2}{y^2x} - \int \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}dt\right]dy$ ■

3. La ecuación $xy^{(2)} + 2(1-x)y^{(1)} + \lambda y = 0$ definida para $x < 0$ y λ una constante, es conocida como la ecuación diferencial de Laguerre.

   a) Clasificar sus puntos singulares, si los tiene:

   Para una EDO de $n-$ésimo orden, donde los coeficientes son funciones de la variable independiente, se dice que se tiene un *punto singular* cuando estos coeficientes se anulan.

   De modo que para la ecuación $xy^{(2)} + 2(1-x)y^{(1)} + \lambda y = 0$ definida para $x < 0$ y λ una constante, se tiene que un punto singular es cuando $2(1-x) = 0$, lo cual ocurre para $x = -1$.

   b) Se determinan la ecuación indicial y las relaciones de recurrencia:

   Entonces para resolver esta ecuación se puede proponer una solución de la forma:

   $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con $y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ y $y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

   De modo que: $\sum_{n=0}^{\infty} x\, n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)na_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

   $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$

Haciendo $m+1=n$, para los índices de la primera y segunda sumatorias:

$\sum_{m=-1}^{\infty}(m+1)a_{m+1}\,x^m + 2\sum_{m=-1}^{\infty}(m+1)a_{m+1}\,x^m - 2\sum_{n=0}^{\infty}na_n\,x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = 0,$

Pero $(m+1)=0$ para $m=-1,$ y como el índice es mudo, se puede volver a la notación con índice n:

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}na_n\,x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = 0,$

De aquí se tiene la ecuación indicial: $3(n+1)a_{n+1} + (-2n+\lambda)a_n = 0,$

Entonces, $a_{n+1} = \frac{(2n-\lambda)a_n}{3(n+1)};\quad n = 0,1,2,$ ...; es la relación de recurrencia buscada.

La última, es una fórmula recursiva para los coeficientes, permite determinarlos toda una vez que se fija el valor para a_0 y a_1 a partir de las condiciones iniciales. Para encontrar las dos soluciones se eligen dos valores diferentes para a_0 y a_1; digamos (i) $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, y (ii) $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ ■

c) Se determina que cuando $\lambda = n$, siendo n un entero positivo, las soluciones son un polinomio de grado n (que al normalizarse de manera apropiada) es conocido como el polinomio $L_n(x)$ de Laguerre:

SOLUCIÓN ALTERNA:

Tomando en "y" un desarrollo en serie de Frobenius se encuentra que la ecuación indicial es:

$a_{j+1} = \frac{j-\lambda}{(j+1)^2}a_j$ … Relación de recurrencia.

Si $a_0 \neq 0$:

$y = a_0(\,1 - \lambda x + [\lambda(\lambda - 1)/(2!)^2]x^2 - \ \ldots + [(-1)^r\,\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - r + 1)/(r!)^2]x^r;$

Con λ entero positivo.

Tomando $a_0 = (-1)^n\,n!$:

$L_n(x) = (-1)^n\left(x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\right)$ … Polinomios de Laguerre de grado n.

$L_0 = 1, L_1(x) = 1 - x, L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ ... ■

4. Se encuentran las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(\pi, 3,1)$ y (1,-2,3).

   Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\pi, 3,1)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) = (1, -2,3)$, entonces la ecuación vectorial que pasa por ambos puntos se puede escribir como: $(x, y, z) = \boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, con $s \in \mathbb{R}$.

   De modo que las ecuaciones paramétricas serán:

   $x = a_1 + s(b_1 - a_1),\ y = a_2 + s(b_2 - a_2),\ z = a_3 + s(b_3 - a_3)$; sustituyendo se tiene:

   $x = \pi + s(1 - \pi),\ y = 3 - 5s,\ z = 1 + 2s$ ■

5. Se calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = 4\cos xy$, en el punto $(\pi/3,1,2)$.

   Entonces, la ecuación del plano tangente queda definido por:

$$z = z(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

$$z = 4\cos(\pi/3) + [-4\sin(\pi/3)](x - \pi/3) + [-(4\pi/3)\ \sin(\pi/3)](y - 1)$$ ■

6. a) Se verifica que si $f(x, y, z) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$, entonces $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

   Entonces, $\boldsymbol{F} \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x \sin y - y^3 \sin x\,, x^2 \cos y + 3y^2 \cos x\ , 0)$.

y $\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}} \\ 2x \sin y - y^3 \sin x & x^2 \cos y + 3y^2 \cos x & 0 \end{vmatrix}$

$$= \boldsymbol{i}(0 - 0) + \boldsymbol{j}(0 - 0) + \boldsymbol{k}([2x\ \cos y - 3y^2 \sin x\,] - [2x\ \cos y - 3y^2 \sin x\,]) = 0$$

   b) Se usan las coordenadas rectangulares para verificar que el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar $f(x, y, z)$ siempre es nulo:

   El gradiente de un campo escalar $f(x, y, z)$, se puede escribir como: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, de modo que su rotacional tendrá la forma:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$

   Ya que para un campo escalar bien definido, continuo y diferenciable, las parciales cruzadas son iguales.

Alejandro Valderrama

Problemas

Derivadas Trigonométricas:

$\Rightarrow$ Si $y = \operatorname{Sen} x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{Sen} x$

$y = \operatorname{tan} x \Rightarrow y' = 1 + \operatorname{tan}^2 x$

Hiperbólicas:

$y = \operatorname{Senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \cosh(x)$

$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \operatorname{Senh}(x)$

Ejercicios:

1.1 $\frac{dy}{dt} + y\cos t = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -y\cos t \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -\cos t\,dt \Rightarrow \ln|y| = -\int \cos t\,dt + c_1 = -\operatorname{Sen} t + c_1$

$\Rightarrow y = e^{-\operatorname{Sen} t + c_1} = c e^{-\operatorname{Sen} t}$ ∎

1.3 $\frac{dy}{dt} + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow (\mu y)' = \mu y' + \mu' y = \mu y' + \mu \frac{2t}{1+t^2} y = \mu \frac{1}{1+t^2}$

$\Rightarrow \mu' = \mu \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{\mu}d\mu = \frac{2t}{1+t^2}dt \Rightarrow \ln|\mu| = \int \frac{2t}{1+t^2}dt + \cancel{c_1} = \ln|1+t^2| \therefore \mu = 1+t^2$

$\Rightarrow (\mu y)' = \frac{1+t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow \mu y = \int 1\,dt + c \Rightarrow (1+t^2)y = t + c \Rightarrow y = \frac{t+c}{1+t^2}$ ∎

1.5 $\frac{dy}{dt} + t^2 y = 1 \Rightarrow \mu = e^{\int t^2 dt} = e^{t^3/3} \Rightarrow (\mu y)' = e^{t^3/3} \Rightarrow y = e^{-t^3/3}\left[\int e^{t^3/3}dt + c\right]$ ∎

1.7 $\frac{dy}{dt} + \frac{t}{1+t^2}y = 1 - \frac{t^3}{1+t^4}y \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \left[\frac{t}{1+t^2} + \frac{t^3}{1+t^4}\right]y = 1 \Rightarrow \mu = e^{\ln|1+t^2|^{1/3}}\, e^{\ln|1+t^4|^{1/4}}$

$\Rightarrow \mu = (1+t^2)^{1/3}\cdot(1+t^4)^{1/4} \Rightarrow y = \frac{c + \int (1+t^2)^{1/3}\cdot(1+t^4)^{1/4}dt}{(1+t^2)^{1/3}\cdot(1+t^4)^{1/4}}$ ∎

1.9 $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}\,e^{-t}y = 0;\ y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -\sqrt{1+t^2}\,e^{-t}dt \Rightarrow \ln|y|\Big|_0^y = -\int_0^t \sqrt{1+t^2}\,e^{-t}dt$

$y = e^{-\int_0^t \sqrt{1+t^2}\,e^{-t}dt}$ ∎

1.11 $\frac{dy}{dt} - 2ty = t;\ y(0) = 1 \Rightarrow \mu(t) = e^{\int -2t\,dt} = e^{-t^2}$

$\Rightarrow (\mu y)' = te^{-t^2} \Rightarrow \mu y\Big|_0^t = e^{-t^2}y - 1 = \int_0^t te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^t -2te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^t$

$\Rightarrow e^{-t^2}y - 1 = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3e^{t^2} - 1}{2}$ ∎

1.13 $\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{1+t^2};\ y(1) = 2 \Rightarrow \mu(t) = e^{\int dt} = e^t \Rightarrow (\mu y)' = \frac{e^t}{1+t^2} \Rightarrow \mu y\Big|_1^t = \int_1^t \frac{e^t}{1+t^2}dt$

$\Rightarrow e^t y - 2e = \int_1^t \frac{e^t}{1+t^2}dt \Rightarrow e^t y = 2e + \int_1^t \frac{e^t}{1+t^2}dt \therefore y = e^{-t}\left[2e + \int_1^t \frac{e^t}{1+t^2}dt\right]$ ∎

1.15 $(1+t^2)\frac{dy}{dt} + ty = (1+t^2)^{5/2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{t}{1+t^2}y = (1+t^2)^{3/2} \Rightarrow \mu(t) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt} = (1+t^2)^{1/2}$

$\Rightarrow (1+t^2)^{1/2}y = \int (1 + 2t^2 + t^4)dt + c \Rightarrow y = \frac{t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + c}{(1+t^2)^{1/2}}$ ∎

1.17 $y' + y = g(t)$; $y(0)=0$; $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \mu(t) = e^{\int dt} = e^t \Rightarrow (e^t y)' = e^t g(t) \Rightarrow e^t y \Big|_0^{t\le 1} = e^t y = \int_0^{t\le 1} 2e^t dt = 2e^t - 2$

$\therefore y = 2 - 2e^{-t}$ si $0 \le t \le 1 \Rightarrow y(1) = 2 - 2e^{-1}$

$\Rightarrow (e^t y)' = e^t y \Big|_1^t = e^t y - e[2 - 2e^{-1}] = \int_1^t 0\, dt = 0$

$\Rightarrow e^t y - 2e + 2 = 0 \Rightarrow e^t y = -2 + 2e \Rightarrow y = e^{-t}[-2 + 2e]$ si $t > 1$

$\therefore y = \begin{cases} 2 - 2e^{-t} & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ e^{-t}[2e - 2] & \text{si } t > 1 \end{cases}$ ▨

Ecuaciones Separables (1.4):

1. $(1+t^2)\frac{dy}{dt} = (1+y^2) \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} + c \Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} t + c_1 \Rightarrow y = \tan(\tan^{-1} t + c_1)$

$\Rightarrow$ como $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$, $\Rightarrow y = \frac{t + \tan c_1}{1 - t\tan c_1} = \frac{t+c}{1-ct}$ ▨

3. $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2(1-t) = (1-t)(1+y^2) \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1-t)\, dt + c$

$\Rightarrow \tan^{-1} y = t - \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y = \tan\left(t - \frac{t^2}{2} + c\right)$ ▨

5. $\cos y \operatorname{sen} t \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} y \cos t \Rightarrow \int \cot y\, dy = \int \cot t\, dt + c_1 \Rightarrow \ln|\operatorname{sen} y| = \ln|\operatorname{sen} t| + c_1$

$\Rightarrow |\operatorname{sen} y| = e^{\ln|\operatorname{sen} t|} \cdot e^{c_1} = c|\operatorname{sen} t| \Rightarrow y = \operatorname{sen}^{-1}[c \operatorname{sen} t]$ ▨

7. $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y + yt^2}$, $y(2) = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y(1+t^2)} \Rightarrow \int_3^y y\, dy = \int_2^t \frac{2t}{(1+t^2)} dt \Rightarrow \frac{y^2}{2}\Big|_3^y = \ln|1+t^2|\Big|_2^t$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} = \ln|1+t^2| - \ln|1+4| = \ln\left|\frac{1+t^2}{5}\right| \Rightarrow y = \left[2\ln\left|\frac{1+t^2}{5}\right| + 9\right]^{1/2}$; $-\infty < t < \infty$ ▨

9. $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)}$; $y(0) = -1 \Rightarrow \int 2(y-1)dy = \int (3t^2 + 4t + 2)dt + c_1$

$\Rightarrow \frac{2y^2}{2} - 2y = \frac{3t^3}{3} + \frac{4t^2}{2} + 2t + c_1 \Rightarrow y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + c_1$

$\Rightarrow$ si $y(0) = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 2(-1) = 3 = c_1 \therefore y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + 3$

o bien, $y^2 - 2y - (t^3 + 2t^2 + 2t + 3) = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm [4 + 4(t^3 + 2t^2 + 2t + 3)]^{1/2}}{2}$

$y_{1,2} = 1 \pm [4 + t^3 + 2t^2 + 2t]^{1/2}$ pero como $y(0) = -1 \Rightarrow y = 1 - \sqrt{4 + t^3 + 2t^2 + 2t}$; $-2 < t < \infty$? ▨

10. $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y + yt^2}$; $y(0) = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y(1+t^2)} \Rightarrow \int y\, dy = \frac{y^2}{2} = \int \frac{2t}{1+t^2} dt + c_1 = \ln|1+t^2| + c_1$

$\Rightarrow y = [2\ln|1+t^2| + 2c_1]^{1/2}$ y como $y(0) = -2 \Rightarrow -2 = [2\ln(1) + 2c_1]^{1/2} \Rightarrow c_1 = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore y = [2\ln|1+t^2| + 4]^{1/2}$ ▨

②

11. $\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y)$; $y(0)=0$; $a,b>0$

i) $a=b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = k(a-y)^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int k\,dt + c_1 \Rightarrow$ Si $z = a-y \Rightarrow dz = -dy$

$\Rightarrow \int \frac{-dz}{z^2} = z^{-1} = kt + c = (a-y)^{-1} \Rightarrow a-y = \frac{1}{kt+c_1}$; como $y(0)=0 \Rightarrow a = \frac{1}{c_1}$ ó $c_1 = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{kt+1/a} + a = \frac{-a}{kat+1} + \frac{a(kat+1)}{kat+1} = \frac{ka^2t}{kat+1}$ ☒

ii) $a \neq 0 \Rightarrow \int_0^y \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \int_0^t k\,dt = kt; \Rightarrow \frac{1}{(a-y)(b-y)} = \frac{A}{(a-y)} + \frac{B}{(b-y)} = \frac{A(b-y)+B(a-y)}{(a-y)(b-y)}$

$\Rightarrow 1 = Ab - yA + Ba - yB = Ab + Ba - y(A+B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ Ab+Ba=1 \Rightarrow A[b-a]=1 \Rightarrow A = \frac{1}{b-a} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^y \frac{dy}{(a-y)(b-y)} = \int_0^y \frac{A}{(a-y)}\,dy - \int_0^y \frac{A}{(b-y)}\,dy = A\int_0^y \frac{-1}{(b-y)}\,dy - A\int_0^y \frac{-1}{(a-y)}\,dy$

$\Rightarrow A\left[\ln|b-y| - \ln|a-y|\right]_0^y = A\left[\ln|b-y| - \ln|b| - \left(\ln|a-y| - \ln|a|\right)\right]$

$\Rightarrow A\left[\ln\left|(b-y)/b\right| - \ln\left|(a-y)/a\right|\right] = A\ln\left|\frac{(b-y)/b}{(a-y)/a}\right| = \ln\left|\frac{(b-y)/b}{(a-y)/a}\right|^A = kt.$

$\therefore \left|\frac{(b-y)/b}{(a-y)/a}\right|^A = e^{kt} \Rightarrow \left|\frac{(b-y)/b}{(a-y)/a}\right|^{1/b-a} = e^{kt} \Rightarrow \frac{(b-y)/b}{(a-y)/a} = e^{k(b-a)t}$

$\Rightarrow \frac{b-y}{a-y} = \frac{be^{k(b-a)t}}{a} \Rightarrow b-y = (a-y)\left[\frac{be^x}{a}\right]$; con $x = k(b-a)t$

$\Rightarrow b-y = \frac{abe^x}{a} - \frac{yb e^x}{a} \Rightarrow -y = \frac{abe^x}{a} - \frac{yb e^x}{a} - b \Rightarrow y\left[\frac{be^x}{a} - 1\right] = \frac{abe^x}{a} - b$

$\Rightarrow y\left[be^x - a\right] = ab\left[e^x - 1\right] \Rightarrow y = \frac{ab[e^x-1]}{be^x - a} = \frac{ab\left[1 - e^{k(b-a)t}\right]}{a - be^{k(b-a)t}}$

$\Leftrightarrow a - be^{k(b-a)t} > 0 \Rightarrow a > be^{k(b-a)t} \Rightarrow \frac{a}{b} > e^{k(b-a)t} = \ln\left|\frac{a}{b}\right| > k(b-a)t$

$\therefore \frac{\ln|a/b|}{k(b-a)} < t < \infty$ ☒

13. $\frac{dy}{dt} = 2(y/t) + (y/t)^2$; $\Rightarrow$ Si $r = y/t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t\frac{dr}{dt} + r \Rightarrow t\frac{dr}{dt} = r + r^2 \Rightarrow \int \frac{dr}{r+r^2} = \int \frac{dt}{t} + c_1$

Pero $\frac{1}{r+r^2} = \frac{1}{r(1+r)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{1+r} = \frac{A(1+r)+Br}{r(1+r)} = \frac{A+Ar+Br}{r(1+r)} \Rightarrow A=1$ y $r(A+B)=0$

De donde $A=1$ y $B=-A=-1$; $\Rightarrow \int \frac{dr}{r+r^2} = \int \frac{1}{r}dr + \int \frac{-1}{1+r}dr = \int \frac{dr}{r} - \int \frac{dr}{1+r}$

$\Rightarrow \left[\ln|r| - \ln|1+r|\right] = \ln\left[\frac{r}{1+r}\right] = \ln|t| + c_1 \Rightarrow \left[\frac{r}{1+r}\right] = c_2 t \Rightarrow \frac{r}{1+r} = ct$

$\Rightarrow r = ct\cdot(1+r) = ct + rct \Rightarrow r[1-ct] = ct$

$\therefore r = \frac{ct}{1-ct}$ y como $r = y/t \Rightarrow y = \frac{ct^2}{1-ct}$ ☒

③

15. $t\frac{dy}{dt} = y + \sqrt{t^2+y^2}$; $y(1)=0$ $\Rightarrow$ Sea $v = y/t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t\frac{dv}{dt} + v \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y/t + \sqrt{1+(y/t)^2}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt}\cdot t + v = v + \sqrt{1+v^2} \Rightarrow t\frac{dy}{dt} = \sqrt{1+v^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{dt}{t} + c_1$

$\Rightarrow \ln|v+\sqrt{1+v^2}| = \ln|t| + c_1 \Rightarrow v + \sqrt{1+v^2} = ct \Rightarrow \sqrt{1+v^2} = ct - v$

$\Rightarrow 1 + v^2 = c^2t^2 - 2ctv + v^2 \Rightarrow 1 = c^2t^2 - 2ctv \Rightarrow 2ctv = c^2t^2 - 1 \Rightarrow v = \frac{c^2t^2-1}{2ct}$

$\Rightarrow v = \frac{ct}{2} - \frac{1}{2ct}$ y como $v = y/t \Rightarrow \frac{y}{t} = \frac{ct}{2} - \frac{1}{2ct} \Rightarrow y = \frac{ct^2}{2} - \frac{1}{2c}$ pero $y(1)=0$

$\Rightarrow 0 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \therefore y = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t^2-1}{2}$ ▨

17. $(t - \sqrt{ty}\,)\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow (t - \sqrt{t^2 y/t}\,)\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow (t - t\sqrt{y/t}\,)\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow t\left[1-\sqrt{y/t}\right]\frac{dy}{dt} = y$

$\Rightarrow \left[1-\sqrt{y/t}\right]\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$; Sea $v = y/t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t\frac{dv}{dt} + v \Rightarrow [1-\sqrt{v}\,]\left(t\frac{dv}{dt} + v\right) = v$

$\Rightarrow t\frac{dv}{dt} + v = \frac{v}{1-\sqrt{v}} \Rightarrow t\frac{dv}{dt} = \frac{v}{1-\sqrt{v}} - v = \frac{v}{1-\sqrt{v}} - \frac{v[1-\sqrt{v}\,]}{1-\sqrt{v}} = v\left[\frac{1-1+\sqrt{v}}{1-\sqrt{v}}\right] = v\left[\frac{\sqrt{v}}{1-\sqrt{v}}\right]$

$\Rightarrow \int\left(\frac{1-\sqrt{v}}{v^{3/2}}\right)dv = \int\frac{dt}{t} + c_1 = \ln|t| + c_1 \Rightarrow \int v^{-3/2}dv - \int\frac{dv}{v} = -2v^{-1/2} - \ln|v|$

$\Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{v}} - \ln|v| = \ln|t| + c_1 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{v}} + \ln\left|\frac{1}{v}\right| = \ln|t| + c_1 \Rightarrow e^{-2/\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{v} = ct.$

$\Rightarrow$ como $v = y/t \Rightarrow \frac{e^{-2/\sqrt{y/t}}}{y/t} = ct \Rightarrow y = \frac{1}{c}e^{-2\sqrt{t/y}} = c_2 e^{-2\sqrt{t/y}}$ ▨

- Prueba de Separabilidad: Sea $\frac{dy}{dx} = F(x,y) \Rightarrow \cdot F(x,y) = F_1(x)F_2(y) \Leftrightarrow \exists\, x_0, y_0 \Rightarrow \cdot$
$F(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow F(x_0,y_0)F(x,y) = F(x,y_0)F(x_0,y)$, si esto ocurre, $\Rightarrow F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$.

Ejemplo: $F(x,y) = x^2y^2 - xy + x^2 - 2y^2 + xy^2 - x^2y + x - 2$; Con $x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow F(0,0) = -2$
$F(x,0) = x^2 + x - 2$ y $F(0,y) = -2y^2 + 2y - 2 \therefore F(x,y) = (x^2+x-2)(y^2-y+1)$ ▨

- Poblaciones: Sea $P'(t) = rP(t)$; $r>0$ para una población que crece; o bien,
$M'(t) = -kM(t)$; $k>0$ para un decremento ó decaimiento. Así que $\frac{dy}{dt} = ay$; $y = ce^{at}$
De modo que: $P(t) = ce^{rt}$ y $M(t) = ce^{-kt}$, para $t_0 = 0 \Rightarrow P(0) = c$ y $M(0) = c \Leftrightarrow P_0, M_0$
$\therefore P(t) = P_0 e^{rt}$ y $M(t) = M_0 e^{-kt}$.
Ejemplo: ¿Qué tiempo se requiere para duplicar la población P? $\Rightarrow 2P_0 = P_0 e^{rt} \Rightarrow e^{rt} = 2 \Rightarrow rt = \ln 2$
$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{r}$, si $r = .1 = 10\%$ anual $\Rightarrow \ln 2/.1 = 10\ln 2 \simeq 6.931$ años. ▨
Ejemplo: $T = 5568$ años para el $C^{14} \Rightarrow M(t) = M_0 e^{-.693151t/5568} = M_0 e^{-0.000124t} = \frac{M_0}{M(t)}$
$\Rightarrow t = 8032.9\ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right)$ ▨

④

- Ecuación logística: $P'(t) = rP(t) - L(P(t))^2$; o bien, $\frac{dy}{dt} = ay + by^2$; $a, b \neq 0$.

$\Rightarrow dt = \frac{dy}{ay+by^2} \Rightarrow t = \int \frac{dy}{y(a+by)}$; Integrando por Fracciones Parciales, $t = \frac{1}{a}(\ln y - \ln(a+by)) + c_1$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{a+by}\right) = at - ac_1 \Rightarrow \frac{y}{a+by} = ce^{at} \therefore y = \frac{a}{ce^{-at} - b}$. De modo que, $P(t) = \frac{r}{ce^{-rt} + L}$.

Si $t = 0 \Rightarrow P_0 = \frac{r}{c+L} \Rightarrow c = \frac{r}{P_0} - L$; Para $t \to \infty$, $P(t) \to r/L$ ∎

- Lanzamiento Vertical de una Pelota: $y(0) = y_0 = 0$; $y'(0) = v_0 \Rightarrow my''(t) = -mg$

$\Rightarrow y''(t) = -g \Rightarrow y'(t) = -gt + c_1 \Rightarrow y'(0) = c_1 = v_0$; $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \Rightarrow y(0) = c_2 = 0$

$\therefore y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. El Punto más alto es cuando $y'(t) = v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = v_0/g$

$\therefore y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$ ∎

Resistencia Atmosférica: $y''_m = my''(t) = -mg - k(y'(t))^2 \uparrow$ y $my''(t) = -mg + k(y'(t))^2 \downarrow$

Si $v = v(t) = y'(t) \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$ (hacia arriba)*, $m\frac{dv}{dt} = -mg + kv^2$ (hacia abajo)

$\Rightarrow *: \frac{m\,dv}{mg+kv^2} = -dt \Rightarrow t = -\int \frac{m\,dv}{mg+kv^2}$; o bien $t = -\frac{m}{k}\int \frac{dv}{a^2+v^2}$; $a = \sqrt{mg/k}$

$\Rightarrow$ haciendo $v = a\tan\theta \Rightarrow t = -\frac{m}{ak}\tan^{-1}\left(\frac{v}{a}\right) + c$, con $v = v_0$ en $t = t_0 = 0$

$\Rightarrow c = \frac{m}{ak}\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{a}\right) \therefore t = \frac{m}{ak}\left[\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)\right]$ (**)

Tiempo para el punto más alto: con $v = 0$, $t = \sqrt{m/gk}\,\tan^{-1}\left(v_0\sqrt{k/mg}\right)$

Posición para un tiempo cualquiera: Resolviendo (**) para v se puede obtener: $y = \frac{m}{k}\ln\left[\cos\left(\frac{akt}{m}\right) + \frac{v_0}{a}\sin\left(\frac{akt}{m}\right)\right]$ ∎

- Sustituciones lineales y Racionales: $v = ax + by + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $v = y/x$.

Ejemplos: 1. $\frac{dy}{dx} = x + y \Rightarrow$ si $v = x + y$, $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - 1 = v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v + 1 \Rightarrow \int \frac{dv}{1+v} = \int dx + c \Rightarrow \ln|1+v| = x + c \Rightarrow 1 + v = ce^x$

$\Rightarrow v = ce^x - 1 \Rightarrow$ como $v = x + y \Rightarrow x + y = ce^x - 1 \Rightarrow y = ce^x - x - 1$ ∎

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow$ si $v = y/x \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = 1 + v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow \int dv = \int \frac{1}{x}dx + c \Rightarrow v = \ln|x| + c$; $v = y/x \Rightarrow y = x\ln|x| + cx$ ∎

③

Ecuaciones Exactas:

1. Si determina si la ecuación $2xy\,dx+(1+x^2)\,dy=0$ es exacta y se resuelve:

$\Rightarrow$ Si $M(x,y)=2xy$ y $N(x,y)=(1+x^2) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2x$ y $\frac{\partial N}{\partial x}=2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ y la ec. es exacta.

Teniendo por solución: $\phi(x,y)=\int M\,dx+\int\left[N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right]dy=\int 2xy\,dx+\int\left[(1+x^2)-\int 2x\,dx\right]dy$

$\Rightarrow \phi(x,y)=x^2y+\int(1+x^2)-x^2\,dy=x^2y+y+x^2y-x^2y=y(1+x^2)$ ▨

Si convierte la ec. $y'=2xy-x$ en exacta y se resuelve:

$\Rightarrow x-2xy+\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow M(x,y)=x-2xy$ y $N(x,y)=1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=-2x$ y $\frac{\partial N}{\partial x}=0$

Sea $\mu=\mu(x) \Rightarrow \cdot\ \mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d\mu}{dx}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\mu}{dx}N=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\mu(-2x)$

$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-2x\,dx \Rightarrow \ln\mu=x^{-2} \Rightarrow \mu=e^{x^{-2}}$

$\therefore\ (x-2xy)e^{x^{-2}}+e^{x^{-2}}\frac{dy}{dx}=0$. Si ahora $M(x,y)=(x-2xy)e^{x^{-2}}$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=-2xe^{x^{-2}}$ y si $N(x,y)=e^{x^{-2}} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=e^{x^{-2}}\cdot(-2x) \therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

La solución es $\phi(x,y)=\int M\,dx-\int\left[N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right]dy$

$\Rightarrow \phi(x,y)=\int(x-2xy)e^{x^{-2}}dx-\int\left[e^{x^{-2}}-\int -2xe^{x^{-2}}dx\right]dy$

$=\int xe^{x^{-2}}dx-\int 2xye^{x^{-2}}dx-\int\left[e^{x^{-2}}-e^{x^{-2}}\right]dy$

$=-\frac{1}{2}\int -2xe^{x^{-2}}dx+y\int -2xe^{x^{-2}}dx=-\frac{1}{2}e^{x^{-2}}+ye^{x^{-2}}=e^{x^{-2}}\left[y-\frac{1}{2}\right]$ ▨

Solución en Series de Potencias:

Si resolvemos la ecuación: $L[y(t)] = \frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} - 2y = 0$

$\Rightarrow$ si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$; $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ y $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

Así que, $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$

$\Rightarrow$ haciendo $m = n-2$, $n = m+2$, se puede escribir

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} t^m - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^n = 0;$$

como $(m+2)$ y $(m+1)$ son cero para $m=-1$ y $m=-2$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} t^m - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^n = 0$$

o bien, $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^n = 0$$

igualando los coeficientes de las potencias iguales, se obtiene:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+1) a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$$

Para encontrar las dos soluciones y_1 y $y_2 \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ se requieren calcular los coeficientes de recurrencia para 2 conjuntos de condiciones iniciales, por ejemplo: $\begin{cases} i) a_0 = 0, a_1 = 1 \\ ii) a_0 = 1, a_0 = 0 \end{cases}$

④

Otros Problemas:

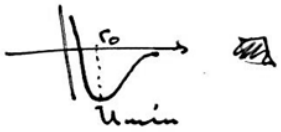
Se determinan los puntos mínimos de energía potencial que definen posiciones de equilibrio estable para los potenciales:

i) $U_{Grav}(r) = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow U'_G = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow U'_G = 0 \Longleftrightarrow r \to \infty$.

ii) $U_{LI}(r) = 4\varepsilon\left[\frac{A}{r^\alpha} - \frac{B}{r^\beta}\right] \Rightarrow U'_{LI} = 4\varepsilon\left[\frac{\beta B}{r^{\beta+1}} - \frac{\alpha A}{r^{\alpha+1}}\right] \Rightarrow U'_{LI} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\beta B}{r^{\beta+1}} = \frac{\alpha A}{r^{\alpha+1}}$

$\Rightarrow \frac{r^{\alpha+1}}{r^{\beta+1}} = \frac{\alpha A}{\beta B} \Rightarrow \begin{cases} r^\alpha = \alpha A \\ r^\beta = \beta B \end{cases} \Rightarrow U_{LI\,min}(r) = 4\varepsilon\left[\frac{A}{\alpha A} - \frac{B}{\beta B}\right] = 4\varepsilon\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right]$

Acique $r_0 = \sqrt[\alpha]{\alpha A} = \sqrt[\beta]{\beta B}$



TAREA

1.a) $x^3y' + 4x^2y = e^{-x}$; $y(-1) = 0$ $\Rightarrow$ Sea $u(x) \to \cdot$ $(uy)' = u'y + uy' = uy' + u\frac{u}{x}y$

$\Rightarrow y' = \frac{u}{x}y = \frac{e^{-x}}{x^3}$ $\Rightarrow u'y = u\frac{u}{x}$ $\Rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{u}{x}dx$ $\Rightarrow \int\frac{u'}{u} = 4\int\frac{1}{x}dx + \cancel{c}$ $\Rightarrow \ln|u| = 4\ln|x|$

$\Rightarrow \ln|u| = \ln|x^4|$ obtiene, $u = e^{x^4}$ $\Rightarrow (uy)' = e^{x^4}\cdot e^{-x} = e^{x^4-x}$

$\therefore (uy)' = e^{x^4-x}$ $\Rightarrow uy\Big|_0^y = e^{x^4}y = \int_{-1}^{x}(e^{x^4-x})dx + C.$

$\Rightarrow y = e^{-x^4}\left[\int_{-}^{x}(e^{x^4-x})\,dx + C\right]$ ▨

1.b) $y' - y = 2xe^{2x}$; $y(0) = 1$ $\Rightarrow$ Sea $u(x) \to \cdot$ $u' = \frac{du}{dx}$ y $(uy)' = uy' + u'y$

Con $u' = -u$ $\Rightarrow \int\frac{u'}{u} = -\int dx + \cancel{c}$ $= -x$ $\Rightarrow \ln|u| = -x$ $\Rightarrow u = e^{-x}$

$\Rightarrow (uy)' = e^{-x}\cdot 2xe^{2x} = 2xe^{2x-x} = 2xe^{x}$ $\Rightarrow uy\Big|_1^y = e^{-x}y\Big|_1^y = e^{-x}y - e^{-x}$

$= e^{-x}(y-1) = \int_0^x 2xe^{x}dx = 2\int xe^{x}dx$ pero $\int xe^{x}dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

Con $u = x$ y $dv = e^{x}dv$ $\Rightarrow du = dx$ y $v = e^{x}$ $\Rightarrow \int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx$

$\Rightarrow 2\int_0^x xe^{x}dx = 2\left[xe^{x} - e^{x}\right]_0^x = 2\left[e^{x}(x-1)\right]_0^x = 2\left[e^{x}(x-1)+1\right]$

$\therefore e^{-x}(y-1) = 2\left[e^{x}(x-1)+1\right]$ $\Rightarrow (y-1) = 2e^{x}\left[e^{x}(x-1)+1\right]$

$\Rightarrow y = 2e^{2x}(x-1) + 2e^{x} + 1$ ▨

2. Ec. de Bernoulli: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ $\Rightarrow v e^{(1-n)\int P dx} = (1-n)\int Q e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + C$

Donde, $v = y^{1-n}$; si $n=1$ $\Rightarrow \ln y = \int(Q-P)dx + C.$

i) $y' - \varepsilon y = -\sigma y^n$; $\varepsilon, \sigma > 0$. $\Rightarrow n = 3$ $\Rightarrow v e^{(1-3)\int\varepsilon dx} = (1-3)\int(-\sigma e^{(1-3)\int\varepsilon dx})dx + C$

$\Rightarrow v e^{-2\varepsilon x} = -2\int(-\sigma e^{-2\varepsilon x})\,dx + C = 2\sigma\int e^{-2\varepsilon x}dx + C = 2\sigma\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right)e^{-2\varepsilon x} + C$

$\Rightarrow y^{-2}e^{-2\varepsilon x} = -\frac{2\sigma}{2\varepsilon}e^{-2\varepsilon x} + C$ $\Rightarrow y^{-2} = e^{2\varepsilon x}\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon}e^{-2\varepsilon x} + C\right] = -\frac{\sigma}{\varepsilon} + Ce^{2\varepsilon x}$

$\Rightarrow y^{-2} = \frac{\varepsilon C e^{2\varepsilon x} - \sigma}{\varepsilon}$ $\Rightarrow y^2 = \frac{\varepsilon}{C\varepsilon e^{2\varepsilon x} - \sigma}$ $\therefore y = \left[\frac{\varepsilon}{C\varepsilon e^{2\varepsilon x} - \sigma}\right]^{1/2}$ ▨

ii) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ $\Rightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$; $n = 3$, $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$

Así que, $v e^{-2\int^2/_x dx} = (-2)\int\frac{1}{x^2}e^{-2\int^2/_x dx}dx + C$ $\Rightarrow v e^{\ln x^{-4}} = v x^{-4} = -2\int\frac{e^{\ln x^{-4}}}{x^2}dx + C$

$\Rightarrow v x^{-4} = -2\int x^{-6}dx + C = -2\left(-\frac{x^{-5}}{5}\right) + C = \frac{2}{5}x^{-5} + C$ $\Rightarrow v = \frac{2}{5}x^{-1} + Cx^4$

Pero $v = y^{(1-n)} = y^{-2} = \frac{2 + 5Cx^5}{5x}$ $\Rightarrow y^2 = \frac{5x}{2+5Cx^5}$ $\Rightarrow y = \left[\frac{5x}{2+5Cx^5}\right]^{1/2}$ ▨

T-1

3.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \Rightarrow (1-y^2)\,dy = x^2\,dx \Rightarrow \int (1-y^2)dy = \int x^2 dx + C \therefore 3y - y^3 = x^3 + C$ ☒

3.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{[x^2+3yx+y^2]^{1/2}}{2y+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\,[1+3y/x+(y/x)^2]^{1/2}}{x\,(1+2(y/x))} = \frac{\sqrt{1+3y/x+(y/x)^2}}{1+2(y/x)}$

$\Rightarrow$ si $v = y/x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{\sqrt{1+3v+v^2}}{1+2v}$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{1+3v+v^2} - v(1+2v)}{1+2v} \Rightarrow \frac{1+2v}{\sqrt{1+3v+v^2} - (v+2v^2)}\,dv = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int \left[\frac{1+2v}{\sqrt{1+3v+v^2} - (v+2v^2)}\right] dv = \int \frac{dx}{x} + C = \ln|x| + C.$ ☒

3.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2(1+(y/x^2))}{x^2} = 1 + (y/x)^2 \Rightarrow$ si $v = y/x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = 1 + v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 - v \Rightarrow \int \frac{1}{1-v+v^2}\,dy = \int \frac{dx}{x} + C = \ln|x| + C.$ ☒

Ecuaciones Diferenciales Exactas:

4. Se verifica que las siguientes EDO'S son exactas, y demuestre así se trata de hallar un factor integrante para resolverlas:

i) $y\,dx + (2x - ye^y)dy = 0 \Rightarrow y + (2x - ye^y)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$ si $M(x, y(x)) = y$,

y $N(x, y(x)) = 2x - ye^y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2 \therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ y la ec. no es exacta.

Ahora bien, sea $\mu = \mu(y) \Rightarrow \mu y + \mu(2x - ye^y)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$ se debe de cumplir que $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$; es decir $\frac{d\mu}{dy}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dy}{dx}^{\to 0}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{d\mu}{dy}M = \mu\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]}{M} dy + \cancel{C}^{0}}$

$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{(2-1)}{y} dy} = y.$ $\therefore$ se puede escribir: $y^2 + (2xy - y^2e^y)\frac{dy}{dx} = 0.$

La solución es entonces: $\phi(x,y) = \int M\,dt + \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt\right] dy$

$\Rightarrow \phi(x,y) = \int y^2\,dt + \int \left[(2xy - y^2e^y) - \int 2y\,dt\right] dy$

$= y^2t + \int [2xy - y^2e^y) - 2yt]\,dy$

$= y^2t + xy - \int y^2e^y dy - y^2t.$ Ahora solo falta resolver $\int y^2e^y dy$. $\underbrace{\qquad}_{e^y(y-1)^2}$

$\therefore \phi(x,y) = xy - e^y(y-1)^2.$ ☒

T-2

ii) $(x+2)\sin(y)\,dx + x\cos(y)\,dy = 0 \Rightarrow (x+2)\sin y + x\cos y \frac{dy}{dx} = 0$.

Sea $M(x,y(x)) = (x+2)\sin y$ y $N(x,y(x)) = x\cos y$. Para que la ec. sea exacta es necesario que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = (x+2)\cos y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = \cos y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

Sea $\mu(x)$ · $\mu(x+2)\sin y + \mu x\cos y \frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow$ la ecuación tiene solución

$\Leftrightarrow \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} N = \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]}{N} dx}$

$\Rightarrow \mu = e^{\int \frac{(x+2)\cos y - \cos y}{x\cos y} dx} = e^{\int \frac{x+1}{x} dx} = e^{[x + \ln x]} = xe^x$

$\therefore \mu(x) = xe^x$

Así se puede escribir: $xe^x(x+2)\sin y + x^2 e^x \cos y \frac{dy}{dx}$

Para probar: sea $M(x,y(x)) = xe^x(x+2)\sin y$, $N(x,y(x)) = x^2 e^x \cos y$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x(x+2)e^x \cos y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x e^x \cos y + x^2 e^x \cos y$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = (x^2+2x)e^x \cos y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = (x^2+2x)e^x \cos y$ $\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Así pues la solución se puede escribir como:

$$\phi(x,y(x)) = \int M\,dx + \int \left[N + \int \frac{\partial M}{\partial y} dx\right] dy$$

$$= \int \left[e^x(x^2+2x)\sin y\,dx + \int \left[x^2 e^x \cos y + \int e^x(x^2+2x)\cos y\,dx\right] dy\right].$$

$$= \sin y \int (x^2+2x)e^x dx + \int \left[x^2 e^x \cos y + \cos y \int (x^2+2x)e^x dx\right] dy$$

Pero $\int (x^2+2x)e^x dx = \int x^2 e^x dx + 2\int x e^x dx$; Si $I_1 = \int x e^x dx = uv - \int v\,du$

y $u = x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$ y $v = e^x \Rightarrow I_1 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$

Si ahora $I_2 = \int x^2 e^x dx = u_2 v_2 - \int v_2 du_2$; $u_2 = x^2$ y $dv_2 = e^x dx \Rightarrow du_2 = 2x$ y $v_2 = e^x$

$\Rightarrow I_2 = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2e^x(x-1) \Rightarrow$

T-3

Se Tiene que: $\int (x^2+2x)e^x = \int x^2 e^x dx + 2\int x e^x = I_2 + 2I_1$

$\Rightarrow \int (x^2+2x)e^x = x^2e^x - 2I_1 + 2I_1 = x^2e^x.$

Así entonces $\phi(x, y(x)) = \operatorname{Sen} y\,[x^2e^x] + \int [x^2 e^x \cos y + \cos y\,[x^2e^x]]\,dy$

$\Rightarrow \phi(x, y(x)) = x^2e^x \operatorname{Sen} y + 2x^2e^x \int \cos y\,dy = x^2e^x \operatorname{Sen} y + 2x^2e^x \operatorname{Sen} y.$

$\therefore \phi(x, y(x)) = 3x^2e^x \operatorname{Sen} y$ ▨

iii) $\underbrace{(e^x \operatorname{Sen} y - 2y \operatorname{Sen} x)}_{M(x,y(x))}dx + \underbrace{(e^x \cos y + 2\cos x)}_{N(x,y(x))}dy = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2\operatorname{Sen} x$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{Sen} x$ $\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

y la ec. es exacta.

Así que $\phi(x, y(x)) = \int M\,dx + \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right]dy$

$\Rightarrow \phi(x, y(x)) = \int (e^x \operatorname{Sen} y - 2y \operatorname{Sen} x)\,dx + \int \left[[e^x \cos y + 2\cos x] - \int (e^x \cos y - 2\operatorname{Sen} x)\,dx\right]dy$

$\Rightarrow \phi(x, y(x)) = e^x \operatorname{Sen} y + 2y\cos x + \int [[e^x \cos y + 2\cos x] - [e^x \cos y + 2\cos x]]\,dy$

$\therefore \phi(x, y(x)) = e^x \operatorname{Sen} y + 2y\cos x$ ▨

5) Sea $m\frac{d}{dt}v(t) = -mg + \beta v^2(t) \Rightarrow \underbrace{+mg - \beta v^2}_{M} + \underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{N} = 0$

Sup $\frac{d\mu(v)}{dv} = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial v}\right] = \frac{2\beta v}{mg - \beta v^2} \Rightarrow \mu(v) = e^{\int \frac{2\beta v}{mg - \beta v^2}dv}$

$\Rightarrow \mu(v) = \frac{1}{mg - \beta v^2}$ $\therefore \phi(t, v(t)) = \int M\,dt + \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial v}\,dt\right]dv$

$\Rightarrow \phi(t, v(t)) = t + \int \frac{m\,dv}{mg - \beta v^2} = t + \frac{m}{\beta}\int \frac{dv}{mg - \beta v^2} = t + \frac{m}{\beta}\frac{1}{2\sqrt{mg/\beta}} \ln\left|\frac{v - \sqrt{mg/\beta}}{v + \sqrt{mg/\beta}}\right|$

▨

T-4

FORMULARIO

1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	
La ecuación homogénea:	$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$
	$y(t) = c\, exp\left(-\int a(t)dt\right)$
La ecuación homogénea con condiciones iniciales:	$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0; \quad y(t_0) = y_0$
	$y(t) = y_0\, exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$
La ecuación no homogénea:	$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$
	$y = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)b(t)dt + c\right) = exp\left(-\int a(t)dt\right)\left(\int \mu(t)b(t)dt + c\right)$
La ecuación no homogénea con condiciones iniciales:	$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t); \quad y(t_0) = y_0$
	$y = \frac{1}{\mu(t)}\left(\mu(t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds\right)$
La ecuación de Bernoulli:	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n; \quad v = y^{-n+1}$
	$ve^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int Q(x)\, e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + c$
Ecuaciones exactas:	$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$
	$\phi(t,y) = \int M(t,y)dt + \int \left[N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\right]dy$
Reducibles a exactas:	$\mu(t,y)M(t,y) + \mu(t,y)N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$
	$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)}{N}dt$
Sustituciones:	$v = ax + by + c; \quad v = \frac{y}{x}$

2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN	
Ecuación homogénea con coeficientes constantes:	$L[y](t) = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ $W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$
$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$	$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}; \qquad r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Si la raíz es negativa: $y(t) = u(t) + iv(t)$	$y_1(t) = u(t) = \exp(-bt/2a)\cos \beta t$ $y_2(t) = v(t) = \exp(-bt/2a)\,\text{sen}\,\beta t; \qquad \beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$
Raíces iguales (*reducción de orden*):	$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \exp\left(-\dfrac{bt}{2a}\right) + c_2 t \exp\left(-\dfrac{bt}{2a}\right)$
Ecuación de Euler-Cauchy:	$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$
$a_0 r(r-1) + a_1 r + a_2 = 0$	$y = c_1 x^a + c_2 x^b$
Raíces complejas $r = a \pm ib$:	$y = c_1 x^a sen(b \ln x) + c_2 x^a \cos(b \ln x)$
Raíces son iguales:	$y = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x$
Ecuación no homogénea:	$L[y] = \dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$
	$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \psi(t)$
	$\psi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$
	$u_1'(t) = -\dfrac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} \qquad y \qquad u_2'(t) = \dfrac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDEN SUPERIOR	
Ecuación homogénea con coeficientes constantes:	$L[y] = a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$ $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0$
$e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$.
Si existen raíces complejas, ocurren en pares conjugados, $e^{(\lambda \pm i\mu)x}$	$e^{\lambda x}\cos \mu x$ y $e^{\lambda x}\operatorname{sen} \mu x$
Raíces repetidas:	$xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots$
Ecuación no homogénea:	$Y(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$
	$Y^{(n)} = \left(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}\right) + \left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right)$
	$u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n = 0$ $u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' = 0$ $\vdots$ $u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g$
	$u_m'(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}, m = 1,2,\ldots,n$
	$Y(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x)\int_{x_0}^{x}\frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}dt$
Soluciones en series de potencias:	$L[y] = \frac{d^2 y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$
	$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$